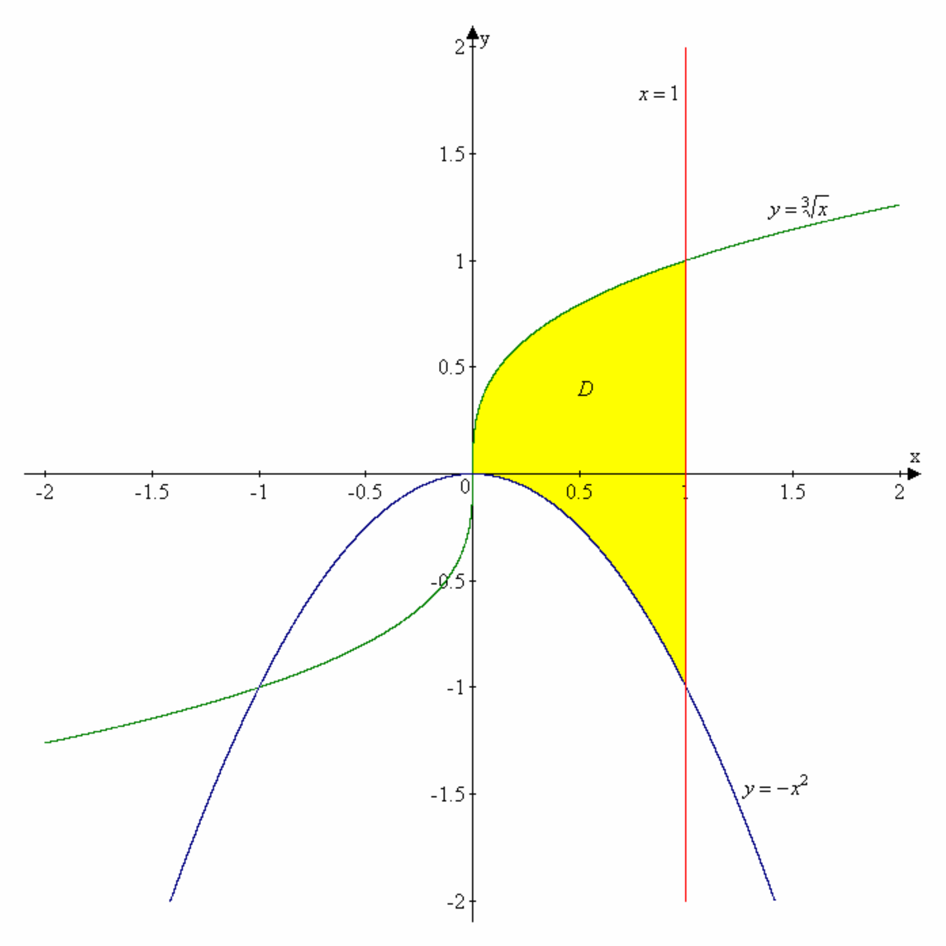
Условие

Вычислить двойной интеграл $\iint\limits_D \left(4xy+176x^3y^3\right)dxdy$, $D: x=1;\ y=\sqrt[3]{x};\ y=-x^2$.

Решение

Для построения чертежа области D найдем точки пересечения графиков $y=\sqrt[3]{x}$ и $y=-x^2$:

$$\sqrt[3]{x}=-x^2;\ x=-x^6;\ x^6+x=0;\ x\left(x^5+1\right)=0;$$
$$x_1=0;\ x_2=-1;$$
$$y_1=0;\ y_2=-1.$$



$$D: \begin{cases} 0\le x\le 1; \\ -x^2\le y\le \sqrt[3]{x} \end{cases}$$

$$\iint\limits_D \left(4xy+176x^3y^3\right)dxdy=\int_0^1 dx\int_{-x^2}^{\sqrt[3]{x}}\left(4xy+176x^3y^3\right)dy=\int_0^1\left(2xy^2+44x^3y^4\right)\Big|_{-x^2}^{\sqrt[3]{x}}dx=$$

$$=\int_0^1\left(2x\cdot\sqrt[3]{x^2}+44x^4\cdot\sqrt[3]{x}-2x^5-44x^{11}\right)dx=\int_0^1\left(2x^{\frac{5}{3}}+44x^{\frac{13}{3}}-2x^5-44x^{11}\right)dx=$$

$$=\left(\frac{3x^{\frac{8}{3}}}{4}+\frac{33x^{\frac{16}{3}}}{4}-\frac{x^6}{3}-\frac{11x^{12}}{3}\right)\Bigg|_0^1=\frac{3}{4}+\frac{33}{4}-\frac{1}{3}-\frac{11}{3}=5.$$

Ответ: $\iint\limits_D \left(4xy+176x^3y^3\right)dxdy=5$.