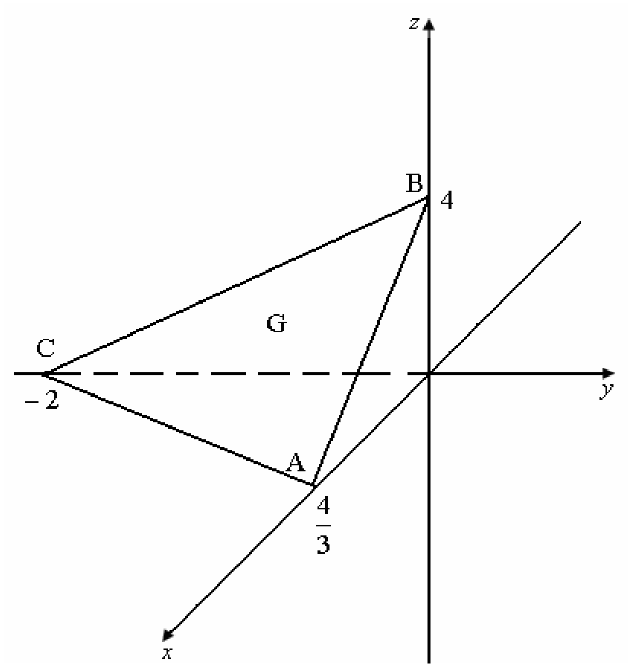
Условие

Даны векторное поле $\overline{F} = (3x - 4y)\overline{i} + (3y - x)\overline{j} + (xy - 2z + 4)\overline{k}$ и плоскость $3x - 2y + z - 4 = 0$, которая совместно с координатными плоскостями образует пирамиду V. Пусть G – основание пирамиды; ограничивающий G контур – λ; нормаль к G, направленная вне пирамиды.

Требуется:

- Вычислить поток векторного поля $\overline{F}$ через поверхность G в направлении нормали $\overline{n}$.
- Вычислить циркуляцию векторного поля $\overline{F}$ по замкнутому контуру λ непосредственно и применив теорему Стокса к контуру λ и ограниченной им поверхности G с нормалью $\overline{n}$
- Вычислить поток векторного поля $\overline{F}$ через полную поверхность пирамиды V в направлении внешней нормали к ее поверхности непосредственно, и применив теорему Остроградского. Сделать чертеж.

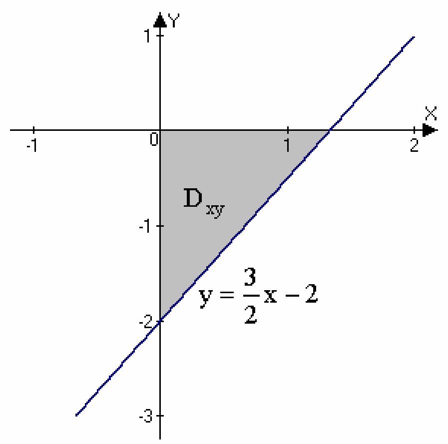
Решение



Поток через основание пирамиды

Спроектируем поверхность G на плоскость Oxy. Из уравнения плоскости имеем:

$$3x - 2y - 4 = 0, \ y = \frac{3}{2}x - 2$$



Направляющие косинусы вектора внешней нормали $\overline{n}(3;-2;1)$ будут такими:

$$\cos\alpha = \frac{3}{\sqrt{14}};\ \cos\beta = -\frac{2}{\sqrt{14}};\ \cos\gamma = \frac{1}{\sqrt{14}}.$$

Поток через основание G:

$$\mathbf{\Pi_G} = \iint\limits_G (3x-4y)dydz + (3y-x)dxdz + (xy-2z+4)dxdy =$$

$$= \iint\limits_\sigma \left((3x-4y)\cdot\frac{3}{\sqrt{14}} - (3y-x)\cdot\frac{2}{\sqrt{14}} + (xy-2z+4)\cdot\frac{1}{\sqrt{14}} \right) d\sigma = \left| d\sigma = \frac{dxdy}{\cos\gamma} = \sqrt{14}dxdy \right| =$$

$$= \iint\limits_{D_{xy}} \left((3x-4y)\cdot 3 - (3y-x)\cdot 2 + xy - 2\cdot(4-3x+2y) + 4 \right) dxdy =$$

$$= \iint\limits_{D_{xy}} (17x-22y+xy-4)dxdy = \int\limits_0^{\frac{4}{3}} dx \int\limits_{\frac{3}{2}x-2}^{0} (17x-22y+xy-4)dy =$$

$$= \int\limits_0^{\frac{4}{3}} \left(17xy - 11y^2 + \frac{xy^2}{2} - 4y \right)\Bigg|_{\frac{3}{2}x-2}^{0} dx = -\int\limits_0^{\frac{4}{3}} \left(17x\left(\frac{3}{2}x-2\right) - 11\left(\frac{3}{2}x-2\right)^2 + \frac{x\left(\frac{3}{2}x-2\right)^2}{2} - 4\left(\frac{3}{2}x-2\right) \right) dx =$$

$$= \int\limits_0^{\frac{4}{3}} \left(-\frac{9}{8}x^3 + \frac{9}{4}x^2 - 28x + 36 \right) dx = \left(-\frac{9x^4}{32} + \frac{3x^3}{4} - 14x^2 + 36x \right)\Bigg|_0^{\frac{4}{3}} = 24.$$

Поток через полную поверхность пирамиды (непосредственное вычисление)

$$\mathbf{\Pi} = \mathbf{\Pi_G} + \mathbf{\Pi_{xy}} + \mathbf{\Pi_{xz}} + \mathbf{\Pi_{yz}}$$

$$\mathbf{\Pi_{xy}} = \iint\limits_{D_{xy}} (-xy-4)dxdy = \int\limits_0^{\frac{4}{3}} dx \int\limits_{\frac{3}{2}x-2}^{0} (-xy-4)dy = \int\limits_0^{\frac{4}{3}} dx \int\limits_0^{\frac{3}{2}x-2} (xy+4)dy =$$

$$= \int\limits_0^{\frac{4}{3}} \left(\frac{xy^2}{2} + 4y \right)\Bigg|_0^{\frac{3}{2}x-2} dx = \int\limits_0^{\frac{4}{3}} \left(\frac{x\left(\frac{3}{2}x-2\right)^2}{2} + 4\left(\frac{3}{2}x-2\right) \right) dx = \int\limits_0^{\frac{4}{3}} \left(\frac{9x^3}{8} - 3x^2 + 8x - 8 \right) dx =$$

$$= \left(\frac{9x^4}{32} - x^3 + 4x^2 - 8x \right)\Bigg|_0^{\frac{4}{3}} = -\frac{136}{27}.$$

$$\mathbf{\Pi_{xz}} = \iint\limits_{D_{xz}} (-x)dxdz = -\int\limits_0^{\frac{4}{3}} xdx \int\limits_0^{-3x+4} dz = \int\limits_0^{\frac{4}{3}} (3x^2-4x)dx = (x^3-2x^2)\Big|_0^{\frac{4}{3}} = -\frac{32}{27}.$$

$$\mathbf{\Pi_{yz}} = \iint\limits_{D_{yz}} 4ydydz = \int\limits_{-2}^{0} 4ydy \int\limits_0^{2y+4} dz = 8\int\limits_{-2}^{0} (y^2+2y)dy = 8\cdot\left(\frac{y^3}{3} + y^2 \right)\Bigg|_{-2}^{0} = -\frac{32}{3}.$$

$$\mathbf{\Pi} = \mathbf{\Pi_G} + \mathbf{\Pi_{xy}} + \mathbf{\Pi_{xz}} + \mathbf{\Pi_{yz}} = 24 - \frac{136}{27} - \frac{32}{27} - \frac{32}{3} = \frac{64}{9}$$

Поток через полную поверхность пирамиды (Формула Остроградского)

$$\mathbf{П} = \iiint\limits_{\mathbf{V}} (\mathbf{3} + 3 - 2) dxdydz = 4 \iiint\limits_{\mathbf{V}} dxdydz = 4V = \frac{64}{9}.$$

Циркуляция (непосредственное вычисление)

$$\mathbf{Ц} = \int\limits_{\mathbf{L}} (3x - 4y)dx + (3y - x)dy + (xy - 2z + 4)dz = \int\limits_{\mathbf{AB}} (3x - 4y)dx + (3y - x)dy + (xy - 2z + 4)dz +$$
$$+ \int\limits_{\mathbf{BC}} (3x - 4y)dx + (3y - x)dy + (xy - 2z + 4)dz + \int\limits_{\mathbf{CA}} (3x - 4y)dx + (3y - x)dy + (xy - 2z + 4)dz.$$

На контуре AB: $y = 0;\ z = 4 - 3x;\ dz = -3dx;\ 0 \le x \le \frac{4}{3}$.

$$\int\limits_{\mathbf{AB}} (3x - 4y)dx + (3y - x)dy + (xy - 2z + 4)dz = \int\limits_{\frac{4}{3}}^{0} (3x - 3 \cdot (-4 + 6x))dx =$$
$$= \int\limits_{\frac{4}{3}}^{0} (12 - 15x)dx = 3 \cdot \int\limits_{\frac{4}{3}}^{0} (4 - 5x)dx = 3 \cdot \left(4x - \frac{5x^2}{2}\right)\Bigg|_{\frac{4}{3}}^{0} = -\frac{8}{3}.$$

На контуре BC: $x = 0;\ z = 2y + 4;\ dz = 2dy;\ -2 \le y \le 0.$

$$\int\limits_{\mathbf{BC}} (3x - 4y)dx + (3y - x)dy + (xy - 2z + 4)dz = \int\limits_{0}^{-2} (3y + 2(-4y - 4))dy =$$
$$= \int\limits_{0}^{-2} (-5y - 8)dy = \int\limits_{-2}^{0} (5y + 8)dy = \left(\frac{5y^2}{2} + 8y\right)\Bigg|_{-2}^{0} = 6.$$

На контуре CA: $z = 0;\ y = \frac{3}{2}x - 2;\ dy = \frac{3}{2}dx;\ 0 \le x \le \frac{4}{3}$.

$$\int\limits_{\mathbf{CA}} (3x - 4y)dx + (3y - x)dy + (xy - 2z + 4)dz = \int\limits_{0}^{\frac{4}{3}} \left(3x - 4\left(\frac{3}{2}x - 2\right) + \frac{3}{2}\left(3\left(\frac{3}{2}x - 2\right) - x\right)\right)dx =$$
$$= \int\limits_{0}^{\frac{4}{3}} \left(\frac{9}{4}x - 1\right)dx = \left(\frac{9x^2}{8} - x\right)\Bigg|_{0}^{\frac{4}{3}} = \frac{2}{3}.$$

$$\mathbf{Ц} = -\frac{8}{3} + 6 + \frac{2}{3} = 4.$$

Циркуляция (формула Стокса):

$$\operatorname{rot} \overline{F} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 3x - 4y & 3y - x & xy - 2z + 4 \end{vmatrix} = x\bar{i} - y\bar{j} + 3\bar{k}$$

$$\text{Ц} = \iint\limits_{G} xdydz - ydxdy + 3dxdy = \iint\limits_{\sigma}\left(x\cdot\frac{3}{\sqrt{14}} + y\cdot\frac{2}{\sqrt{14}} + 3\cdot\frac{1}{\sqrt{14}}\right)d\sigma =$$

$$= \left| d\sigma = \frac{dxdy}{\cos\gamma} = \sqrt{14}dxdy \right| = \iint\limits_{D_{xy}} (3x + 2y + 3)dxdy = \int\limits_{0}^{\frac{4}{3}} dx \int\limits_{\frac{3}{2}x-2}^{0} (3x + 2y + 3)dy =$$

$$= \int\limits_{0}^{\frac{4}{3}} \left(3xy + y^2 + 3y\right)\Big|_{\frac{3}{2}x-2}^{0} dx = \int\limits_{0}^{\frac{4}{3}}\left(-3x\cdot\left(\frac{3}{2}x - 2\right) - \left(\frac{3}{2}x - 2\right)^2 - 3\cdot\left(\frac{3}{2}x - 2\right)\right)dx =$$

$$= \int\limits_{0}^{\frac{4}{3}}\left(-\frac{27}{4}x^2 + \frac{15}{2}x + 2\right)dx = \left(-\frac{9}{4}x^3 + \frac{15x^2}{4} + 2x\right)\Bigg|_{0}^{\frac{4}{3}} = 4.$$