Условие

Исследовать функцию $y=\dfrac{x-1}{x^2-2x}$ и построить их график.

Решение

1. *Область определения*

Область определения представляет собой множество всех действительных чисел без точек $x_1=0$ и $x_2=2$, в которых обращается в ноль знаменатель, поэтому $D(y)=(-\infty;0)\cup(0;2)\cup(2;+\infty)$.

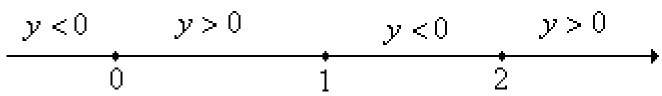
2. *Пересечение с осями координат*

С осью абсцисс: $\dfrac{x-1}{x^2-2x}=0;\ x-1=0;\ x=1$. Получили точку $(1;0)$.
С осью ординат пересечений нет.

3. Область определения не симметрична относительно начала координат, поэтому заданная функция ни чётная ни нечётная.

4. *Интервалы знакопостоянства*

Знак функции $y=\dfrac{x-1}{x^2-2x}=\dfrac{x-1}{x(x-2)}$ совпадает с знаком выражения $x(x-1)(x-2)$. Чередование знаков определим методом интервалов:



При $x\in(-\infty;0)\cup(1;2)$ $y(x)<0$,
при $x\in(0;1)\cup(2;+\infty)$ $y(x)>0$.

5. *Интервалы монотонности*

$$y'=\frac{x^2-2x-(x-1)\cdot(2x-2)}{\left(x^2-2x\right)^2}=\frac{-x^2+2x-2}{\left(x^2-2x\right)^2}.$$

$-x^2+2x-2=-\left(x^2-2x+2\right)=-\left(x^2-2x+1+1\right)=-(x-1)^2-1$

Так как $(x-1)^2>0$ при любом $x\in D(y)$, то $-(x-1)^2-1<0$. Так как $\left(x^2-2x\right)^2>0$ при всех $x\in D(y)$, то $y'<0$, т.е. функция убывает на всей области определения.

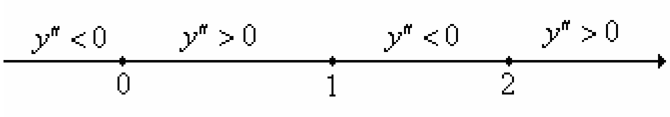
6. *Интервалы выпуклости и вогнутости*

$$y''=\left(\frac{-x^2+2x-2}{\left(x^2-2x\right)^2}\right)'_x=\frac{(-2x+2)\cdot\left(x^2-2x\right)^2-\left(-x^2+2x-2\right)\cdot 2\left(x^2-2x\right)\cdot(2x-2)}{\left(x^2-2x\right)^4}=$$

$$=-2\cdot(x-1)\cdot\frac{x^2-2x-2x^2+4x-4}{\left(x^2-2x\right)^3}=2\cdot(x-1)\cdot\frac{x^2-2x+4}{\left(x^2-2x\right)^3}=2\cdot\frac{x-1}{x^3(x-2)^3}\cdot\left(x^2-2x+4\right).$$

$$x-1=0;\ x=1.$$

Так как $x^2-2x+4=(x-1)^2+3>0$, то знак y'' совпадает с знаком выражения $\dfrac{x-1}{x^3(x-2)^3}$.



При $x\in(-\infty;0)\cup(1;2)$ функция выпукла,
при $x\in(0;1)\cup(2;+\infty)$ функция вогнута.
$(1;0)$ – точка перегиба.

7. *Асимптоты*

Так как $\lim\limits_{x\to 0\pm 0}\dfrac{x-1}{x^2-2x}=\infty$ и $\lim\limits_{x\to 2\pm 0}\dfrac{x-1}{x^2-2x}=\infty$, то прямые $x=0$ (ось ординат) и $x=2$ будут вертикальными асимптотами.

Уравнение наклонной асимптоты будем искать в виде $y=kx+b$.

$$k=\lim_{x\to\infty}\frac{y(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x-1}{x(x^2-2x)}=0,\quad b=\lim_{x\to\infty}(y(x)-kx)=\lim_{x\to\infty}\frac{x-1}{x^2-2x}=0.$$

Следовательно, $y=0$ (ось абсцисс) – наклонная (горизонтальная) асимптота.