Условие

Решить систему $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 2x_3 = 0 \\ 4x_1 + x_2 + 4x_3 = 6 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = 4 \end{cases}$ методами Крамера, Гаусса и с помощью обратной матрицы.

Решение

Метод Крамера

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 4 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 4 + 8 - 4 - 2 - 8 + 8 = 6;$$

$$\Delta_{x_1} = \begin{vmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 6 & 1 & 4 \\ 4 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 12 - 16 - 8 + 12 = 0;$$

$$\Delta_{x_2} = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 4 & 6 & 4 \\ 1 & 4 & 2 \end{vmatrix} = 24 + 32 - 12 - 32 = 12;$$

$$\Delta_{x_3} = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 4 & 1 & 6 \\ 1 & 1 & 4 \end{vmatrix} = 8 - 6 - 12 + 16 = 6.$$

$$x_1 = \frac{\Delta_{x_1}}{\Delta} = 0;\ x_2 = \frac{\Delta_{x_2}}{\Delta} = 2;\ x_3 = \frac{\Delta_{x_3}}{\Delta} = 1.$$

Метод Гаусса

Расширенная матрицы системы: $\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 2 & 0 \\ 4 & 1 & 4 & 6 \\ 1 & 1 & 2 & 4 \end{array}\right)$

Поменяем местами первую и третью строки:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 4 \\ 4 & 1 & 4 & 6 \\ 2 & -1 & 2 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ II - 4\cdot I \\ III - 2\cdot I \end{array} \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & -3 & -4 & -10 \\ 0 & -3 & -2 & -8 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ III - II \end{array} \to$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & -3 & -4 & -10 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ III : 2 \end{array} \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & -3 & -4 & -10 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} I - 2\cdot III \\ II + 4\cdot III \to \\ \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & -3 & 0 & -6 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) II : (-3) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} I - II \\ \\ \\ \end{array} \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

Из последней матрицы имеем: $x_1 = 0$, $x_2 = 2$, $x_3 = 1$.

Решение с помощью обратной матрицы

$$A=\begin{pmatrix}2 & -1 & 2\\ 4 & 1 & 4\\ 1 & 1 & 2\end{pmatrix};\ B=\begin{pmatrix}0\\ 6\\ 4\end{pmatrix};\ X=\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix};\ X=A^{-1}B.$$

$\Delta A=6;$

$A_{11}=-2;\ A_{12}=-4;\ A_{13}=3;$

$A_{21}=4;\ A_{22}=2;\ A_{23}=-3;$

$A_{31}=-6;\ A_{32}=0;\ A_{33}=6.$

$$A^{-1}=\frac{1}{6}\begin{pmatrix}-2 & 4 & -6\\ -4 & 2 & 0\\ 3 & -3 & 6\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}=\frac{1}{6}\begin{pmatrix}-2 & 4 & -6\\ -4 & 2 & 0\\ 3 & -3 & 6\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0\\ 6\\ 4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 2\\ 1\end{pmatrix}$$

Следовательно, $x_1=0$, $x_2=2$, $x_3=1$.

Ответ: $x_1=0$, $x_2=2$, $x_3=1$.